page 412 1/3 1992

Ecole Nationale des Ingénieurs des Travaux Ruraux ...

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures

N.B. *: Ce sujet comporte 3 pages de texte.*

On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, I désignant la matrice identité et O la matrice nulle. On note $\Delta_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices diagonalisables.

Etant donnés un polynôme $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$ à coefficients complexes et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P(M)$ la matrice $a_0 I + a_1 M + \cdots + a_r M^r$ et l'on dit que M annule P si $P(M) = O$. Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on dit que u annule P si sa matrice représentative (dans une base arbitraire) annule P.

I

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, u un endomorphisme diagonalisable de E et $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres distinctes. Montrer que u annule le polynôme unitaire $P(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_p)$.

2. Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u (c'est-à-dire tel que l'on a $u(F) \subset F$). Montrer que l'endomorphisme de F, induit par u sur F, est diagonalisable.

II

On désigne par A_1 et A_2 deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent pour la multiplication, c'est-à-dire telles que l'on ait : $A_1 A_2 = A_2 A_1$. On peut envisager ces matrices comme représentant dans la base canonique deux endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ le sous-espace $\ker(A_1 - \lambda I)$ est stable par A_2. En déduire que les deux matrices ont un vecteur propre commun dans E.

2. On suppose en outre que les deux matrices sont dans $\Delta_n(\mathbb{C})$. Montrer que E possède une base constituée de vecteurs propres pour les deux matrices.

3. Pour le cas particulier des deux matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i-1 & i & 2-2i \\ 1-i & 1-i & 2i-1 \end{pmatrix}$, expliciter dans $\mathbb{C}^3$ une base de vecteurs propres communs.

III

Dans cette section G désigne un sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constitué de matrices commutant deux à deux pour la multiplication et $H = \mathrm{Vect}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G .

1. Montrer que les matrices de H commutent deux à deux pour la multiplication.

On suppose pour la suite de cette section III que l'on a $G \subset \Delta_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs qui sont propres à la fois pour toutes les matrices de G . En déduire que l'on a $H \subset \Delta_n(\mathbb{C})$ et que $\dim(H) \leq n$.

On suppose dans la suite de III que H est de dimension exactement n et contient une matrice A ayant n valeurs propres distinctes.

3. Montrer que les matrices $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ sont dans H et constituent une base de cet espace. Montrer que H est en fait l'ensemble des matrices de $\Delta_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A .

4. On reprend les notations et les hypothèses de la question précédente ; soit alors $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui commute avec A . On désigne par P le polynôme caractéristique de M et on écrit $P(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (t-\lambda_r)^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On admettra que E est la somme directe des sous-espaces $E_k = \ker(M - \lambda_k I)^{\alpha_k}$. Soit enfin S la matrice représentant dans la base canonique l'endomorphisme de E qui induit sur chaque E_k l'homothétie de rapport λ_k .

a) Montrer que la matrice $N = M - S$ est nilpotente (c'est-à-dire que $N^n = O$) et que l'on a $NS = SN$.

b) Montrer que les sous-espaces E_k sont stables par A et que A, S et N commutent deux à deux. Montrer enfin que $N = O$ (on pourra considérer un vecteur propre X de A tel que l'on ait $NX \neq 0$ et aboutir à une contradiction).

c) Conclure de ce qui précède que H est l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A .

IV

Dans cette section on considère l'ensemble $\mathrm{S}(n)$ des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

1. Rappeler les propriétés concernant les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices de $\mathrm{S}(n)$.

2. Soient $A, B \in \mathrm{S}(n)$ qui commutent entre elles pour la multiplication. Montrer que l'espace $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) possède une base orthonormale constituée de vecteurs propres communs à ces deux matrices.

3. Soit maintenant $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour $M \in E$ on désigne par $Tr(M)$ la trace de la matrice M . On rappelle que

l'on a $Tr(M_1M_2) = Tr(M_2M_1)$ pour tout couple de matrices $(M_1, M_2) \in E^2$ et que $< M_1, M_2 >= Tr({}^tM_1M_2)$ (où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M) est un produit scalaire euclidien de E . On munit E de ce produit scalaire.

Soient A, B deux matrices de $\mathrm{S}(n)$.

a) Montrer que l'application $g_A : E \to E$ définie par : $g_A(M) = AM$ est un endomorphisme autoadjoint de E , et qu'on peut obtenir une base orthonormale propre constituée de matrices de la forme $X\,{}^tY$ où $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A et $Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur non nul, assimilés à des matrices unicolonnes.

b) Etablir des propriétés analogues pour $d_B : E \to E$; $M \mapsto MB$.

c) Vérifier que d_B et g_A commutent entre eux. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres communs à ces deux endomorphismes, en utilisant des vecteurs propres de A et de B .

d) On considère le cas particulier où $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Expliciter une base orthonormale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ayant la propriété du c). En déduire la résolution de l'équation différentielle suivante, où $M(t)$ désigne une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions réelles dérivables du paramètre réel t :

$$M'(t) = AM(t) + M(t)B \ .$$